第 13 章　立体几何初步

13.1　基本立体图形

13.1.1　棱柱、棱锥和棱台+

13.1.2　圆柱、圆锥、圆台和球

1. C 【解析】三棱锥由四个面围成,四棱柱和五棱锥均由六个面围成,三棱台由五个面围成.

故选 C.

2. AC 【解析】对于 A,多面体至少有四个面,所以 A 正确;

对于 B,仅有两个面互相平行的五面体也可以是三棱柱,所以 B 错误;

对于 C,由棱锥的定义知,由一个底面为多边形,其余各面为具有一个公共顶点的三角形围成的几何体是棱锥,所以 C 正确;

对于 D,一个正方形按不同方向平移所得几何体,可能是正方体,也可能是长方体或斜四棱柱,所以 D 错误. 故选 AC.

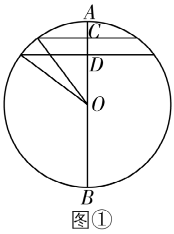
3. D 【解析】①错误,圆台是直角梯形绕其垂直于底边的腰所在直线或等腰梯形绕其两底边的中点连线所在直线旋转形成的;②正确;③错误,球是以半圆的直径所在直线为轴旋转一周形成的旋转体;④正确.

4. A 【解析】倾斜后水槽中的水形成的几何体有两个平面平行,侧棱互相平行且相等,由棱柱的定义可知,此几何体是棱柱.

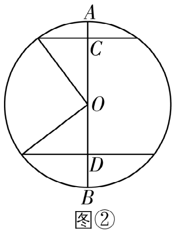
5. AD 【解析】因为截面面积分别为 9π 和 16π,所以两截面圆的半径分别为 3 和 4. 如图①所示,若两个平行平面在球心的同侧,则这两个平行平面间的距离 $CD=OC-OD=\sqrt{5^2-3^2}-\sqrt{5^2-4^2}=4-3=1$.

如图②所示,若两个平行平面在球心的

两侧,则这两个平行平面间的距离 $CD=OC+OD=\sqrt{5^2-3^2}+\sqrt{5^2-4^2}=4+3=7.$

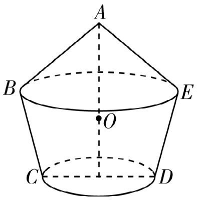


图①



图②

6. B 【解析】由题意可知形成如图的几何体.



该几何体是由圆台和圆锥组合而成的简单组合体. 故选 B.

7. D 【解析】由题得,蛋巢的底面是边长为 1 的正方形,故经过四个顶点截鸡蛋(球)所得的截面圆的直径为 1. 由于鸡蛋(球)的半径为 1,故球心到截面圆的距离为 $\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,而垂直折起的四个小直角三角形的高为 $\frac{1}{2}$,故鸡蛋最高点与蛋巢底面的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}$. 故选 D.

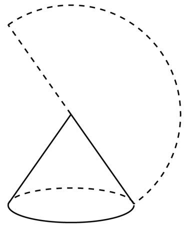
8. B 【解析】根据题图①的圆、矩形,得题图①围成的几何体为圆柱;

根据题图②的圆、扇形,得题图②围成的几何体为圆锥;

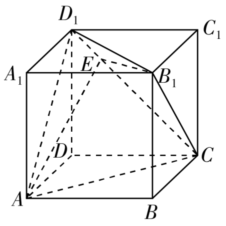
根据题图③的三角形,得题图③围成的几何体为棱锥.

9. D 【解析】根据题意,选项 A,B,C 中的平面图形经过还原后均能构成正方体,而 D 中的平面图形经过还原后是缺少一个面的正方体. 故选 D.

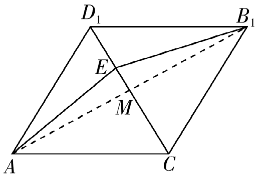
10. D 【解析】根据题意,如图所示,设圆锥的母线长为 l,则 $\pi l=2\pi\times2$,可得 $l=4$.



11. C 【解析】如图①所示,连接 AC,AD_1,B_1D_1,B_1C,将 $\triangle ACD_1$ 和 $\triangle B_1CD_1$ 展开到同一平面,



图①



图②

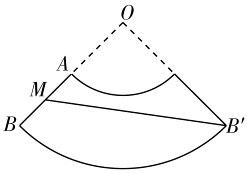
连接 AB_1 交 CD_1 于点 M,如图②所示,则 $AE+B_1E\geqslant AB_1$,

因为 $AB=4$,所以 $AC=B_1C=AD_1=CD_1=B_1D_1=4\sqrt{2}$,

所以四边形 ACB_1D_1 为菱形,$AB_1\perp CD_1$,易知 $\triangle ACD_1$ 为等边三角形,所以 $\angle ACD_1=60°$,

则 $AB_1=4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=4\sqrt{6}$,故 $AE+B_1E$ 的最小值是 $4\sqrt{6}$.

12. 20 【解析】作出圆台的侧面展开图,并补成扇形,设扇形的圆心为 O,



由图得,所求的最短长度是线段 MB' 的长,

设 $OA=R$ cm,扇形圆心角是 α,

由题意得，$4\pi=\alpha R$ ①，$8\pi=\alpha(8+R)$ ②，

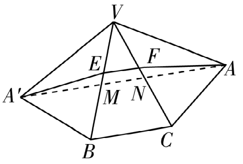
联立①②解得，$\alpha=\frac{\pi}{2}$，$R=8$，

所以 $OM=12$ cm，$OB'=16$ cm，

则 $MB'=\sqrt{12^2+16^2}=20$(cm).

故绳子的最短长度为 20 cm.

13. $6\sqrt{3}$ 【解析】将三棱锥侧面沿着 VA 展开，如图所示.



连接 AA'，分别交 VB，VC 于点 M，N，则 $A'E+EF+FA\geqslant AA'$.

由题可知，$VA=VA'=6$，$\angle AVA'=120°$，

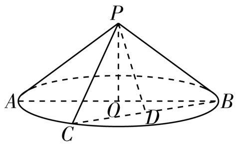
由余弦定理可得 $AA'^2=6^2+6^2-2\times6\times6\times\cos120°=108$，则 $AA'=6\sqrt{3}$，

所以截面 $\triangle AEF$ 周长的最小值为 $6\sqrt{3}$.

14.【解】(1) 由轴截面 PAB 的面积 $S=\frac{1}{2}PO\times8=12$，解得 $PO=3$，因为底面圆的半径 $OA=4$，

所以圆锥 PO 的母线长为 $\sqrt{PO^2+OA^2}=5$.

(2) 方法一：取 BC 的中点 D，连接 PD，因为 $PC=PB$，所以 $PD\perp BC$，



在 Rt$\triangle PDB$ 中，$PD^2+DB^2=PB^2=25$，

则 $PD\cdot DB\leqslant\frac{PD^2+DB^2}{2}=\frac{25}{2}$，

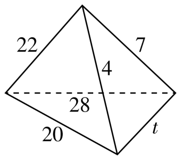
当且仅当 $PD=DB=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立，此时 $BC=5\sqrt{2}<8$，满足题意，

所以截面 PBC 面积的最大值为 $2\times\frac{1}{2}\times\frac{25}{2}=\frac{25}{2}$.

方法二：在 $\triangle PAB$ 中，由余弦定理得，$\cos\angle APB=\frac{PA^2+PB^2-AB^2}{2PA\cdot PB}=\frac{25+25-64}{2\times5\times5}=-\frac{7}{25}<0$，所以 $\angle APB>\frac{\pi}{2}$，

又 $S_{\triangle PCB}=\frac{1}{2}PC\cdot PB\cdot\sin\angle CPB$，所以当 $\angle CPB=\frac{\pi}{2}$ 时，截面 PCB 的面积最大，最大值为 $\frac{1}{2}\times5\times5\times1=\frac{25}{2}$.

15. 9 【解析】根据棱长关系 $28-4=24>22>20>7$，故长为 4 和 28 的棱不能为四面体的同一个表面三角形的边，则长为 4 和 28 的棱必为四面体的相对棱，又 $4+7=11<20<22$，$28-7=21>20$，则四面体中与长为 7 的棱相对的棱的长度为 20，如图所示，



因此 $\begin{cases}7-4<t<7+4,\\28-20<t<28+20,\end{cases}$ 又 $t\in\mathbf{Z}$，所以 t 的最小值是 9.

13.1.3 直观图的斜二测画法

1. C 【解析】由题意知，在 $\triangle ABC$ 中，$AO\perp BC$（O 为 BC 中点），

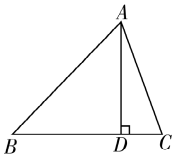
因为 $A'O'=2\sqrt{3}$，所以 $AO=4\sqrt{3}>4$，

又 $B'O'=O'C'=2$，所以 $BC=B'C'=4$，

则 $AB=AC=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+2^2}=2\sqrt{13}>4$，

所以 $\triangle ABC$ 是三边中只有两边相等的等腰三角形. 故选 C.

2. AD 【解析】由题意得到原 $\triangle ABC$ 的平面图如图所示.

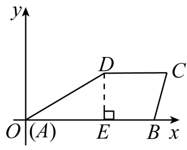


其中 $AD \perp BC$，$BD>DC$，所以 $AB>AC>AD$，所以 $\triangle ABC$ 的 AB，AD，AC 三条线段中最长的是 AB，最短的是 AD. 故选 AD.

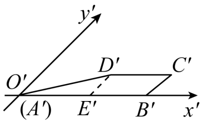
3.【解】(1) 如图①所示，在梯形 $ABCD$ 中，以边 AB 所在的直线为 x 轴，A 为原点，建立平面直角坐标系 xOy. 如图②所示，以 A'为原点，画出对应的 x'轴、y'轴，使$\angle x'O'y'=45°$.

(2) 在图①中，过点 D 作 $DE \perp x$ 轴，垂足为 E. 在 x'轴上取 $A'B'=AB=4$，$A'E'=AE=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\approx 2.598$；在图②中，过点 E'作 $E'D' /\!/ y'$轴，使 $E'D'=\dfrac{1}{2}ED=0.75$，再过点 D' 作 $D'C' /\!/ x'$轴，且使 $D'C'=DC=2$.

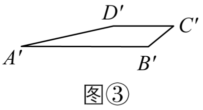
(3) 连接 $A'D'$，$B'C'$，并擦去 x'轴与 y'轴及其他辅助线，如图③所示，则四边形 $A'B'C'D'$ 就是梯形 $ABCD$ 的直观图.



图①



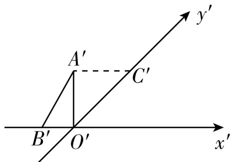
图②



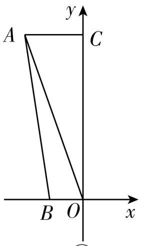
图③

4. C 【解析】如图①，作 $A'C' /\!/ x'$轴，交 y'轴于 C'，由已知得 $A'C'=O'A'=2$，则 $O'C'=2\sqrt{2}$.

如图②，在直角坐标系 xOy 的 y 轴上取点 C，使得 $OC=2O'C'=4\sqrt{2}$，



图①



图②

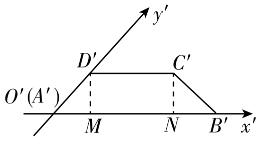
则△AOB 的边 OB 上的高为 $4\sqrt{2}$. 故选 C.

5. BC 【解析】A 选项,如图①,过点 C', D'作 $C'N$, $D'M$ 分别垂直 x'轴于点 N, M,

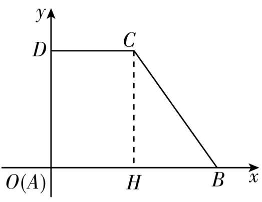
因为等腰梯形 $A'B'C'D'$ 中 $A'B'=4$, $C'D'=2$,

所以 $MN=2$, $A'M=B'N=1$,

又 $\angle D'A'M=45°$, 所以 $A'D'=\sqrt{2}$, A 错误;



图①



图②

B 选项,由斜二测画法可知 $AB=A'B'=4$, B 正确;

C 选项,由斜二测画法作出原图形,如图②,可知 $AD=2A'D'=2\sqrt{2}$, $AB=4$, $CD=2$, $AD\perp AB$,

故四边形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{(CD+AB)\cdot AD}{2}=6\sqrt{2}$ (另解:直观图的面积为$\frac{1}{2}\times(4+2)\times1=3$, 故四边形 $ABCD$ 的面积为 $2\sqrt{2}\times3=6\sqrt{2}$), C 正确;

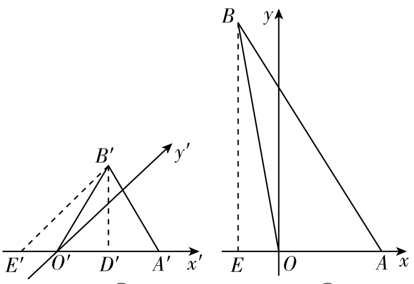
D 选项，过点 C 作 $CH\perp AB$ 交 AB 于点 H，

则 $AH=CD=2$，$BH=4-2=2$，$CH=AD=2\sqrt{2}$，

由勾股定理得 $BC=\sqrt{BH^2+CH^2}=2\sqrt{3}$，

故四边形 $ABCD$ 的周长为 $AB+CD+AD+BC=4+2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}=6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$，D 错误. 故选 BC.

6. $2\sqrt{6}$ 【解析】如图①，过点 B' 作 $B'E'/\!/y'$轴，交 x'轴于点 E'，



图①　图②

如图②，在平面直角坐标系 xOy 中，在 x 轴上取 $OA=O'A'$，$OE=O'E'$，

过点 E 作 $EB/\!/y$ 轴，令 $EB=2E'B'$，连接 OB，AB，则 $\triangle OAB$ 即为原图形，

BE 为点 B 到 x 轴的距离，设 $BE=h$，

则 $B'E'=\frac{1}{2}h$.

在图①中过点 B' 作 $B'D'\perp x'$轴于点 D'，

则 $B'D'=2\sin 60°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

$\because\ \angle B'E'O'=45°$，$\therefore\ B'D'=B'E'\cdot\sin\angle B'E'O'=\frac{1}{2}h\sin 45°=\sqrt{3}$，即$\frac{\sqrt{2}}{4}h=\sqrt{3}$，解得 $h=2\sqrt{6}$，故原图中顶点 B 到 x 轴的距离是 $2\sqrt{6}$.

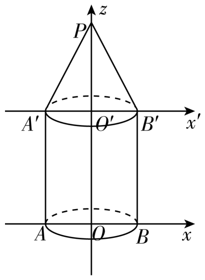
7.【解】(1) 画轴. 如图①所示，画 x 轴、z 轴，使 $\angle xOz=90°$.

(2) 画圆柱的两底面. 以 O 为中点，在

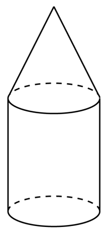
x 轴上取线段 $AB=3$ cm，则 $OA=OB=\frac{3}{2}$ cm. 利用椭圆模板画椭圆，使其经过 A,B 两点，这个椭圆就是圆柱的下底面. 在 z 轴上截取点 O'，使 $OO'=4$ cm，过 O'作 x 轴的平行线 $O'x'$，类似圆柱下底面的作法作出圆柱的上底面.

(3) 画圆锥的顶点. 在 z 轴上截取点 P，使 $PO'=3$ cm.

(4) 成图. 连接 $A'A,B'B,PA',PB'$，并整理，得到此空间图形的直观图. 如图②所示.



图①



图②

13.2 基本图形位置关系

13.2.1 平面的基本性质

1. C 【解析】平面 α 内有一条直线 l，则这条直线上的一点 A 必在这个平面内，符号语言表述为 $l\subset\alpha, A\in l\Rightarrow A\in\alpha$，故选 C.

2. D 【解析】连接 MC（图略），则直线 $MC\cap AB=M$，

所以直线 MC,AB 可确定一个平面 δ，

且 $A,B,C\in\delta$，

所以平面 δ 即为过 A,B,C 三点所确定的平面 γ，

又 $MC\subset\beta$，所以 $\beta\cap\gamma=MC$，所以 γ 与 β 的交线必经过 M,C 两点. 故选 D.

3. ABC 【解析】A 是真命题，因为直线在平面外即直线与平面相交或直线与

平面平行，所以最多有一个公共点；

B 是真命题，直线 a，b 有交点，则两平面有公共点，所以两平面相交；

C 是真命题，两条平行直线可确定一个平面，又一条直线与两条平行直线的两个交点在这两条平行直线上，所以过这两个交点的直线也在平面内，即三线共面；

D 是假命题，这三条直线可以交于同一点，但三条直线不在同一平面内.

4. C 【解析】AB 与 CC_1 不共面，因此没有同时与这两条直线平行的直线，

与 AB 平行且与 CC_1 相交的有 CD，C_1D_1，与 AB 相交且与 CC_1 平行的有 AA_1，BB_1，与 AB 相交也与 CC_1 相交的有 BC，所以共有 5 条. 故选 C.

5. D 【解析】对于 A，共线的三点可确定无数个平面，故 A 错误；

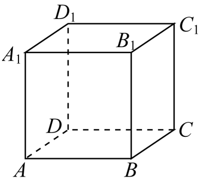
对于 B，若两个平面有一个公共点，则就有一条经过该点的公共直线，即交线，该交线上有无数个公共点，故 B 错误；

对于 C，三条平行直线可能共面，也可能有一条在另外两条确定的平面外，故 C 错误；

对于 D，当三条直线两两相交，三个交点不重合时，三条直线共面，当三条直线两两相交于同一个点时，这三条直线可能在同一个平面内，也可能不共面，此时其中任意两条直线都可确定一个平面，即可确定三个平面，故 D 正确.

故选 D.

6. C 【解析】如图所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，



①$AA_1\cap AB=A$，$AA_1\cap A_1B_1=A_1$，直线 AB，A_1B_1 与 AA_1 可以确定 1 个平面（平面 ABB_1A_1）；

②$AA_1\cap AB=A$，$AA_1\cap A_1D_1=A_1$，直线 AB，AA_1 与 A_1D_1 可以确定 2 个平面（平面 ABB_1A_1 和平面 ADD_1A_1）；

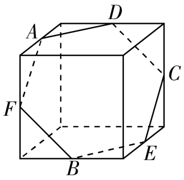
③三条直线 AB，AD，AA_1 交于一点 A，它们可以确定 3 个平面（平面 $ABCD$、平面 ABB_1A_1 和平面 ADD_1A_1）.

7. D 【解析】选项 A，B，C 中，A，B，C，D 四点显然不共面.

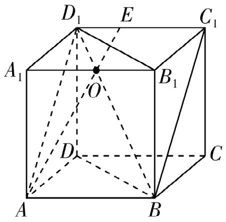
对于 D 选项，如图所示，取 E，F 为正方体所在棱的中点，连接 AD，DC，CE，EB，BF，FA，

易知多边形 $ADCEBF$ 为正六边形，所以 A，B，C，D 四点共面.

故选 D.



8. B 【解析】连接 AD_1，BC_1，BD_1，如图.



$\because O\in$ 直线 AE，$AE\subset$ 平面 ABC_1D_1，

$\therefore O\in$ 平面 ABC_1D_1.

又 $O\in$ 平面 BB_1D_1D，平面 $ABC_1D_1\cap$ 平面 $BB_1D_1D=BD_1$，$\therefore O\in$ 直线 BD_1，

$\therefore D_1$，O，B 三点共线. $\because\triangle ABO\backsim\triangle ED_1O$，$\therefore OB:OD_1=AB:ED_1=3:$

1，$\therefore OB=3OD_1$. 故选 B.

9.【证明】依题意 $O\notin d$，点 O 及直线 d 确定一个平面，记为 α.

$\because A\in d,d\subset\alpha$，

$\therefore A\in\alpha$，又 $a\cap d=A$，$\therefore A\in a$，

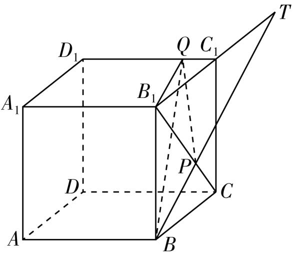
又 $O\in a,O\in\alpha$，

则由基本事实 2 可知 $a\subset\alpha$.

同理可证，$b\subset\alpha,c\subset\alpha$，

$\therefore a,b,c,d$ 四条直线在同一个平面内.

10.【证明】在平面 B_1C_1CB 中，BP,B_1C_1 不平行，延长 B_1C_1，BP，设 $BP\cap B_1C_1=T$，



则 $T\in BP$ 且 $T\in B_1C_1$，故 $T\in$ 平面 BPQ 且 $T\in$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，

又平面 $BPQ\cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1=l$，所以 $T\in l$，所以 l,BP,B_1C_1 交于一点.

11. C 【解析】按平面两侧正四面体的顶点数分类.

①一侧有 1 个顶点，另外一侧有 3 个顶点. 此时 4 个顶点对应的中截面符合要求，共 4 个.

②两侧各有 2 个顶点，此时两组对棱的 4 个中点构成的平行四边形所在的平面符合要求，共 3 个.

综上所述，符合题意的平面共有 7 个.

13.2.2 空间两条直线的位置关系

1. D 【解析】对于选项 A，$DC_1\cap CD=D$，故 A 不正确；

对于选项 B，$DC_1/\!/AB_1$，故 B 不正确；

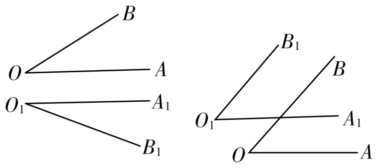
对于选项 C，直线 DC_1 与直线 CD_1 相交，故 C 不正确；

对于选项 D，因为直线 DC_1 与直线 A_1D_1 不同在任意一个平面，所以直线 DC_1 与直线 A_1D_1 是异面直线，故 D 正确.

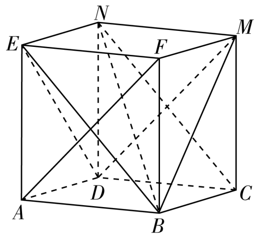
故选 D.

2. D 【解析】如图，

当 $\angle AOB=\angle A_1O_1B_1$，且 $OA/\!/O_1A_1$，OA 与 O_1A_1 的方向相同时，OB 与 O_1B_1 不一定平行. 故选 D.



3. BD 【解析】正方体的直观图如图所示.

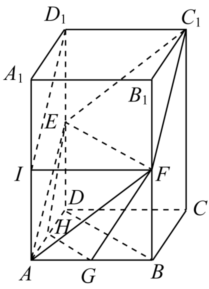


很显然，BM 与 ED 不平行，A 错误；

由 $BC/\!/EN$ 且 $BC=EN$ 知 $BCNE$ 为平行四边形，则 $EB/\!/CN$，又 EB 与 BM 相交，所以 CN 与 BM 不平行，B 正确；

很显然，$CN/\!/BE$，DM 与 BN 是异面直线，C 错误，D 正确. 故选 BD.

4. AD 【解析】如图，连接 EC_1，FC_1，EF，AF，AE，取棱 AA_1 的中点 I，连接 ID_1，IF.

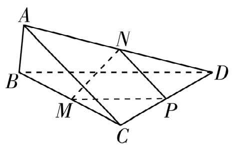


由题设，$IF//D_1C_1$ 且 $IF=D_1C_1$，则四边形 IFC_1D_1 为平行四边形，所以 $ID_1//FC_1$ 且 $ID_1=FC_1$，

又 E 是棱 DD_1 中点，故 $AI//ED_1$ 且 $AI=ED_1$，则四边形 $IAED_1$ 为平行四边形，所以 $ID_1//AE$ 且 $ID_1=AE$，综上，$FC_1//AE$ 且 $FC_1=AE$，故 F,C_1,E,A 四点共面，A 正确；连接 EH，由过直线外一点有且仅有一条直线与该直线平行，且由 A 知 $FC_1//AE$，可知不可能有 $EH//C_1F$，B 错误；连接 HG，由 $A\in$ 平面 $ABCD$，$A\in$ 平面 EFC_1，知 $A\in$ 平面 $EFC_1\cap$ 平面 $ABCD$，又 $HG\subset$ 平面 $ABCD$，而 $A\notin HG$，故平面 $EFC_1\cap$ 平面 $ABCD\neq HG$，C 错误；连接 BD，FG，又 G，H 分别是棱 AB，AD 的中点，则 $HG//BD$ 且 $HG=\frac{1}{2}BD$，E，F 分别是棱 DD_1，BB_1 的中点，则 $EF//BD$ 且 $EF=BD$，所以 $EF//HG$，即 E,F,H,G 四点共面，且 $HG=\frac{1}{2}EF$，故直线 EH 与直线 FG 相交，D 正确. 故选 AD.

5. $40°$ 或 $140°$ 【解析】空间两个角 $\angle ABC$ 和 $\angle A'B'C'$，因为 $AB//A'B'$，$BC//B'C'$ 且 $\angle ABC=40°$，则 $\angle A'B'C'=40°$ 或 $\angle A'B'C'=180°-40°=140°$.

6. D 【解析】如图，取 CD 的中点 P，连接 PM，PN.



因为 M，N 分别为 BC，AD 的中点，

所以 $PM//BD$ 且 $PM=\frac{1}{2}BD=\sqrt{2}$，

$PN//AC$ 且 $PN=\frac{1}{2}AC=1$，

则 $\angle MPN$ 或其补角即为异面直线 AC 与 BD 所成的角.

因为 $PN^2+MN^2=PM^2$，且 $PN=MN=1$，

所以 $\angle PNM=\frac{\pi}{2}$，所以 $\angle PMN=\angle MPN=\frac{\pi}{4}$，即异面直线 AC 与 BD 所成的角是$\frac{\pi}{4}$. 故选 D.

7. D 【解析】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，连接 A_1C_1，C_1D（图略），则 $A_1C_1=A_1D=C_1D$，所以 $\triangle A_1C_1D$ 为等边三角形.

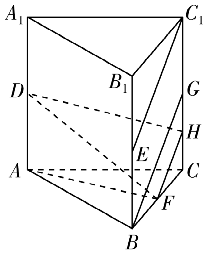
因为 $A_1D/\!/B_1C$，所以$\angle A_1PC_1$（或其补角）为异面直线 PC_1 与 B_1C 所成的角.

当点 P 与线段 A_1D 的端点重合时，异面直线 PC_1 与 B_1C 所成的角取得最小值$\frac{\pi}{3}$；

当点 P 与线段 A_1D 的中点重合时，异面直线 PC_1 与 B_1C 所成的角取得最大值$\frac{\pi}{2}$.

故异面直线 PC_1 与 B_1C 所成角的取值范围是$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$. 故选 D.

8. $\frac{\sqrt{5}}{10}$ 【解析】如图，在棱 CC_1 上取一点 H，使得 $CC_1=4CH$，取 CC_1 的中点 G，连接 BG，HF，DH，AF.



由于 G，E 分别是棱 CC_1，BB_1 的中点，所以 $BE=C_1G$，$BE/\!/C_1G$，

故四边形 BGC_1E 为平行四边形，

所以 $C_1E/\!/BG$，

又因为 F，H 分别是 BC，CG 的中点，所以 $HF/\!/BG$，所以 $HF/\!/C_1E$，则异面直线 DF 与 C_1E 的夹角是$\angle DFH$ 或其补角.

设 $AB=4$,则 $CF=2$,$CH=1$,$AD=2$.

所以 $HF=\sqrt{CF^2+CH^2}=\sqrt{5}$,$DH=\sqrt{AC^2+(AD-CH)^2}=\sqrt{17}$,

$AF=\sqrt{AB^2-BF^2}=2\sqrt{3}$,$DF=\sqrt{AF^2+AD^2}=4$,

故 $\cos\angle DFH=\dfrac{16+5-17}{2\times4\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$,故异面直线 DF 与 C_1E 的夹角的余弦值是$\dfrac{\sqrt{5}}{10}$.

9. C　【解析】在正方体中,棱与棱构成的异面直线有$\dfrac{12\times4}{2}=24$(对),

棱与面对角线构成的有 $12\times6=72$(对),

棱与体对角线构成的有 $12\times2=24$(对),

面对角线与面对角线构成的有 $6\times5=30$(对),

面对角线与体对角线构成的有 $12\times2=24$(对).

故正方体的棱、面上的对角线及正方体的体对角线本身及相互之间构成的异面直线共有 $24+72+24+30+24=174$(对).

13.2.3　直线与平面的位置关系

课时 1　直线与平面平行的判定及性质

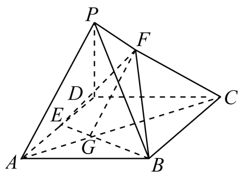
1. C　【解析】选项 C 中,平面 α 与平面 β 有公共点 A,则它们相交于过点 A 的一条直线,而不是点 A,故 C 不正确.

2. ④　【解析】因为直线 a 不平行于平面 α,所以直线 a 与平面 α 的位置关系是直线 a 在平面 α 内或直线 a 与平面 α 相交,则 α 内不是所有直线都与 a 异面. 若直线 a 在平面 α 内,则在 α 内存在与 a 平行的直线,故①②③错误,④正确. 故答案为④.

3. D　【解析】如图,连接 AC 交 BE 于 G,

连接 FG，因为 $PA//$平面 EBF，$PA\subset$平面 PAC，平面 $PAC\cap$平面 $BEF=FG$，所以 $PA//FG$，所以$\frac{PF}{FC}=\frac{AG}{GC}$.

又 $AD//BC$，E 为 AD 的中点，所以$\frac{AG}{GC}=\frac{AE}{BC}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{PF}{FC}=\frac{1}{2}$.



4. B 【解析】$\because M,N$ 分别为棱 AA_1，BB_1 的中点，$\therefore MN//AB$，$MN=AB$. 又 $MN\not\subset$平面 ABC，$AB\subset$平面 ABC，$\therefore MN//$平面 ABC.

$\because MN\subset$平面 $MNEF$，平面 $MNEF\cap$平面 $ABC=EF$，$\therefore MN//EF$，$\therefore EF//AB$.

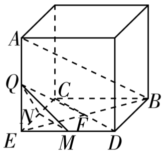
显然在 $\triangle ABC$ 中，$EF\neq AB$，

$\therefore EF\neq MN$，

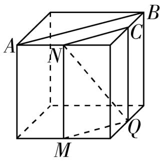
$\therefore$ 四边形 $MNEF$ 为梯形. 故选 B.

5. A 【解析】对 A，如图①，D，C，E 为正方体的顶点，连接 CD，BE，BE 交 CD 于点 F，连接 QF. 易得 $AB//QF$，$QF\cap$平面 $MNQ=Q$，故直线 AB 与平面 MNQ 不平行.

对 B，如图②，设 C 为所在棱的中点，连接 NC，CQ，根据中位线的性质有 $NC//AB$，又 $MN//CQ$，$MN=CQ$，故四边形 $MNCQ$ 为平行四边形，故 $NC//MQ$，则 $AB//MQ$，因为 $AB\not\subset$平面 MNQ，$MQ\subset$平面 MNQ，所以直线 AB 与平面 MNQ 平行.



图①

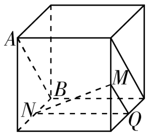


图②

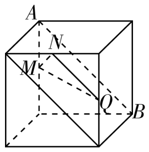
对 C，如图③，根据中位线与平行四边形的性质，可得 $AB//MQ$，因为 $AB\not\subset$平面 MNQ，$MQ\subset$平面 MNQ，所以直线

AB 与平面 MNQ 平行.

对 D,如图④,根据中位线与平行四边形的性质,可得 $AB/\!/NQ$,因为 $AB\not\subset$ 平面 MNQ,$MQ\subset$ 平面 MNQ,所以直线 AB 与平面 MNQ 平行. 故选 A.

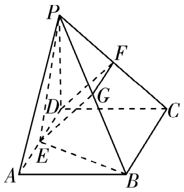


图③



图④

6.【证明】(1)取 PB 的中点 G,连接 FG,EG,如图所示.



因为点 G,F 分别为 PB,PC 的中点,

所以 $FG/\!/CB$,$FG=\frac{1}{2}BC$.

因为四边形 $ABCD$ 为矩形,

所以 $BC/\!/AD$,且 $BC=AD$.

又 E 为 AD 的中点,

所以 $DE/\!/BC$ 且 $DE=\frac{1}{2}BC$,

所以 $DE/\!/FG$,$DE=FG$,

所以四边形 $DEGF$ 为平行四边形,

所以 $DF/\!/GE$.

因为 $DF\not\subset$ 平面 PBE,$GE\subset$ 平面 PBE,

所以 $DF/\!/$ 平面 PBE.

(2)由(1)知 $DF/\!/$ 平面 PBE,又 $DF\subset$ 平面 PDC,平面 $PDC\cap$ 平面 $PBE=l$,

所以 $DF/\!/l$.

课时 2　直线与平面垂直的判定及性质

1. CD　【解析】根据线面垂直的判定定理可知当平面 α 内有两条相交直线都与 l 垂直时,直线 l 与平面 α 垂直. 故选 CD.

2. D　【解析】当 $a/\!/\alpha$ 时,$\theta=0°$;当 $a\perp\alpha$ 时,$\theta=90°$;当 a 和 α 斜交时,θ 的取值范围是 $\{\theta|0°<\theta<90°\}$. 综上,θ 的取值

范围是$\{\theta|0°\leqslant\theta\leqslant 90°\}$.

3. C 【解析】$\because l\perp$平面ABC,$\therefore BC\perp l$.

又$\because BC\perp CA$,$l\cap CA=A$,l,$CA\subset$平面ACP,$\therefore BC\perp$平面ACP,而$CP\subset$平面ACP,

$\therefore BC\perp CP$,$\therefore \angle PCB=90°$. 故选 C.

4. B 【解析】对于①,若$l/\!/m$,$m/\!/n$,又$l\perp\alpha$,则$n\perp\alpha$,故①正确. 对于②,若$m\perp\alpha$,$n\perp\alpha$,所以$m/\!/n$,由于$l/\!/m$,则$l/\!/n$,故②正确. 对于③,若$l/\!/\alpha$,$l\perp m$,所以$m/\!/\alpha$或$m\subset\alpha$或m与α相交,故③错误. 故选 B.

5. A 【解析】对于①,过空间不共线三点有且只有一个平面,过空间共线的三点有无数个平面,故①错误;对于②,垂直于同一直线的两条直线有可能平行、相交或异面,故②错误;对于③,一个平面内有两条直线与另一个平面平行,则这两个平面有可能平行或相交,故③错误;对于④,由线面垂直的性质定理得④正确. 故选 A.

6. A 【解析】对于 A,依题意$AA'\perp$平面ABC,$BC\subset$平面ABC,所以$AA'\perp BC$,又AB是底面圆的直径,所以$BC\perp AC$,$AA'\cap AC=A$,AA',$AC\subset$平面$A'AC$,所以$BC\perp$平面$A'AC$,故 A 正确;

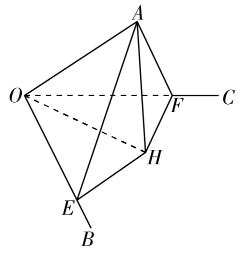
对于 B,显然BC与AB不垂直,则BC不可能垂直于平面$A'AB$,故 B 错误;

对于 C,显然AC与$A'C$不垂直,则AC不可能垂直于平面$A'BC$,故 C 错误;

对于 D,显然AC与AB不垂直,则AC不可能垂直于平面$A'AB$,故 D 错误.

故选 A.

7. D 【解析】如图,过点A作$AH\perp$平面BOC于点H,连接OH,则$\angle AOH$为直线OA与平面OBC所成的角θ.



过点 H 分别作 $HE\perp OB$ 交 OB 于点 E，$HF\perp OC$ 交 OC 于点 F，连接 AE,AF.

因为 $OB\subset$ 平面 BOC，

所以 $AH\perp OB$.

因为 $AH\cap HE=H$，$AH,HE\subset$ 平面 AEH，

所以 $OB\perp$ 平面 AEH.

又 $AE\subset$ 平面 AEH，

所以 $AE\perp OB$. 同理 $AF\perp OC$.

因为 $\angle AOB=\angle AOC=60°$，$\angle OEA=\angle OFA$，$OA=OA$，所以 $\triangle OEA\cong\triangle OFA$，

所以 $AE=AF$，$OE=OF$.

所以 $EH=FH$，则 OH 为 $\angle BOC$ 的平分线.

由 $\angle BOC=60°$，可得 $\angle FOH=30°$.

令 $HF=a$，则 $OH=2a$，$OF=\sqrt{3}a$，即 $OE=OF=\sqrt{3}a$.

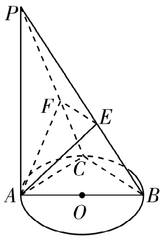
在 Rt $\triangle AOE$ 中，因为 $\angle AOB=60°$，所以 $AO=\dfrac{\sqrt{3}a}{\cos 60°}=2\sqrt{3}a$.

故在 Rt $\triangle AOH$ 中，$\cos\angle AOH=\dfrac{OH}{OA}=\dfrac{2a}{2\sqrt{3}a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 D.

8. ①②③ 【解析】连接 AC.

由题意知 $PA\perp$ 平面 ABC，$\because BC\subset$ 平面 ABC，$\therefore PA\perp BC$.

又 $AC\perp BC$，$PA\cap AC=A$，$PA,AC\subset$ 平面 PAC，$\therefore BC\perp$ 平面 PAC.



$\because AF\subset$ 平面 PAC，$\therefore BC\perp AF$.

又$\because AF\perp PC$，$BC\cap PC=C$，$BC,PC\subset$ 平面 PBC，$\therefore AF\perp$ 平面 PBC.

$\because PB\subset$ 平面 PBC，$\therefore AF\perp PB$.

又 $AE\perp PB$，$AE\cap AF=A$，$AE,AF\subset$ 平面 AEF，$\therefore PB\perp$ 平面 AEF.

$\because EF\subset$ 平面 AEF，$\therefore PB\perp EF$.

又 AF 与 AE 不平行且相交，$\therefore AE$ 与平面 PBC 不垂直. 故①②③正确.

9. 菱形 【解析】$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$平面 $ABCD$，$\therefore PA\perp BD$.

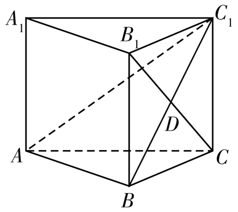
$\because PC\perp BD$，$PA\cap PC=P$，$\therefore BD\perp$ 平面 PAC.

又 $AC\subset$平面 PAC，$\therefore BD\perp AC$.

又四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

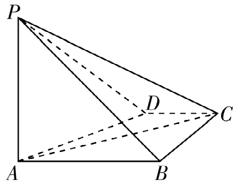
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为菱形.

10. 【证明】连接 BC_1 与 B_1C 相交于点 D，如图所示：



在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BB_1\perp$ 平面 ABC，$AB\subset$ 平面 ABC，所以 $BB_1\perp AB$. 又 $AB\perp BC$，$BC\cap BB_1=B$，$BC,BB_1\subset$平面 BB_1C_1C，所以 $AB\perp$平面 BB_1C_1C. 又因为 $B_1C\subset$ 平面 BB_1C_1C，所以 $AB\perp B_1C$. 因为 $BC=CC_1$，所以四边形 BCC_1B_1 为菱形，所以 $B_1C\perp BC_1$，又因为 $AB\cap BC_1=B$，且 $AB,BC_1\subset$平面 ABC_1，所以 $B_1C\perp$平面 ABC_1，又因为 $AC_1\subset$平面 ABC_1，所以 $B_1C\perp AC_1$.

11. (1)【证明】若选择①. 连接 AC，因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，$AC\subset$平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AC$.

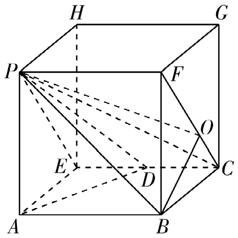


因为 $PA=2$，$PC=3$，所以 $AC^2=PC^2-PA^2=5$，又因为 $AB=2$，$BC=1$，所以 $AB^2+BC^2=AC^2$，所以 $AB\perp BC$. 因为 $CD\perp BC$，所以 $AB/\!/CD$，又 $AB\neq CD$，所以四边形 $ABCD$ 是直角梯形.

若选择②. 连接 AC，因为 $PA\perp$ 平面

$ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AC$. 因为 $PA=2$，$PC=3$，所以 $AC^2=PC^2-PA^2=5$，因为 $AB=2$，$BC=1$，所以 $AB^2+BC^2=AC^2$，所以 $AB\perp BC$. 因为 $CD//$平面 PAB，$CD\subset$平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，所以 $AB//CD$，所以 $CD\perp BC$，又 $AB\neq CD$，所以四边形 $ABCD$ 是直角梯形.

(2)【解】选择①②相同. 如图，延长 CD 到 E 使 $DE=CD$，



连接 AE，则四边形 $ABCE$ 为矩形，将四棱锥 $P-ABCD$ 补成长方体 $ABCE-PFGH$，连接 PE，CF，则 PB 与平面 PCD 所成的角即 PB 与平面 $PFCE$ 所成的角.

过 B 点作 $BO\perp CF$ 于点 O，连接 OP，由长方体的性质知，$EC\perp$平面 $BCGF$. 因为 $OB\subset$平面 $BCGF$，所以 $EC\perp OB$，又 $CF\cap EC=C$，CF，$EC\subset$平面 $PFCE$，所以 $OB\perp$ 平面 $PFCE$，则 $\angle BPO$ 即为直线 PB 与平面 PCD 所成的角. 在 $\mathrm{Rt}\triangle CBF$ 中，$CF=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，可求得 $OB=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle PAB$ 中，可求得 $PB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，所以

$$\sin\angle BPO=\frac{OB}{PB}=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

12. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】$\because$ PA，PB，PC 两两垂直，$PB\cap PC=P$，PB，$PC\subset$平面 PBC，

$\therefore$ $PA\perp$平面 PBC.

又 $PA=1$，$PB=PC=\sqrt{2}$，

$\therefore$ $AB=AC=\sqrt{3}$，$BC=2$，$\therefore$ 点 A 到棱 BC 的距离为$\sqrt{2}$，

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

设点 P 到平面 ABC 的距离为 h，由 $V_{A-PBC}=V_{P-ABC}$ 得$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times1=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times h$，解得 $h=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

即点 P 到平面 ABC 的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13. (1)【**证明**】取棱 BC 上靠近 B 的三等分点 M_1，连接 MM_1，B_1M_1，如图.

又 M 为棱 AC 上靠近 A 的三等分点，N 为棱 A_1B_1 上靠近 A_1 的三等分点，

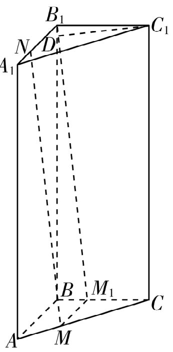
$\therefore MM_1 \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{2}{3}AB$，$NB_1 \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{2}{3}AB$，

$\therefore MM_1 \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} NB_1$.

$\therefore$ 四边形 MM_1B_1N 是平行四边形，

$\therefore MN/\!/B_1M_1$.

又 $MN\not\subset$ 平面 BB_1C_1C，$B_1M_1\subset$ 平面 BB_1C_1C，$\therefore MN/\!/$平面 BB_1C_1C.



(2)【**解**】在棱 BB_1 上存在点 D，使得 $C_1D\perp$平面 B_1MN，且 $B_1D=\frac{1}{9}$. 证明如下：连接 C_1D，由直三棱柱的性质及 $\angle ABC=90°$，可知 $B_1N\perp$ 侧面 BB_1C_1C，

又 $C_1D\subset$侧面 BB_1C_1C，

$\therefore B_1N\perp C_1D$.

$\therefore$ 当 $C_1D\perp B_1M_1$ 时，易证 $C_1D\perp$平面 B_1MN.

$\because B_1M_1\perp C_1D$，

$\therefore \angle BB_1M_1+\angle B_1DC_1=90°$.

又$\angle B_1C_1D+\angle B_1DC_1=90°$，

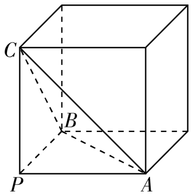
$\therefore \angle B_1C_1D=\angle BB_1M_1$.

又 $\tan\angle BB_1M_1=\dfrac{BM_1}{BB_1}=\dfrac{\frac{1}{3}}{3}=\dfrac{1}{9}$,

$\therefore \tan\angle B_1C_1D=\dfrac{B_1D}{B_1C_1}=\dfrac{B_1D}{1}=\dfrac{1}{9}$,

$\therefore B_1D=\dfrac{1}{9}$,即在棱 BB_1 上存在点 D 使得 $C_1D\perp$ 平面 B_1MN.

14. D 【解析】由已知三棱锥 $P-ABC$ 可看作正方体的一部分,如图所示,它的外接球就是三棱锥补形为的正方体的外接球,正方体的体对角线就是外接球的直径,且体对角线长为 $2\sqrt{3}$,球的半径 $R=\sqrt{3}$,



设点 P 到平面 ABC 的距离为 h,因为 $V_{P-ABC}=V_{A-PBC}$,

所以$\dfrac{1}{3}h\cdot S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{3}PA\cdot S_{\triangle PBC}$,

解得 $h=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,

所以球心 O 到平面 ABC 的距离为 $R-h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

13.2.4 平面与平面的位置关系

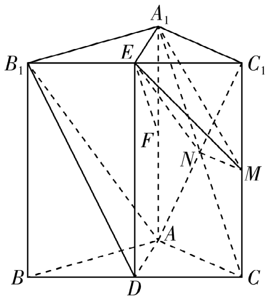
课时 1 平面与平面平行的判定及性质

1. C 【解析】两个平面的位置关系只有平行和相交两种.

在两个平面内分别有一条直线,这两条直线互相平行,不能确定两个平面的位置关系是平行还是相交. 故选 C.

2. ABC 【解析】连接 AC_1, A_1E, ED, MN, EM, 如图所示. 由题意得, N 为 AC_1 的中点, 又 E 是 B_1C_1 的中点, 所以 $EN/\!/AB_1$. 又 $AB_1\subset$ 平面 ADB_1, $EN\not\subset$ 平面 ADB_1, 所以 $EN/\!/$平面 ADB_1(提示:线面平行的判定定理). 因为四边

形 BCC_1B_1 是平行四边形，D,E 分别为 BC,B_1C_1 的中点，所以 $DE//BB_1$，$DE=BB_1$，所以 $DE//AA_1$，$DE=AA_1$，所以四边形 $ADEA_1$ 是平行四边形，所以 $A_1E//AD$，又 $AD\subset$ 平面 ADB_1，$A_1E\not\subset$ 平面 ADB_1，所以 $A_1E//$ 平面 ADB_1. 又 $A_1E,EN\subset$ 平面 A_1EN，$A_1E\cap EN=E$，$A_1E,EN\subset$ 平面 A_1EN，所以平面 $A_1EN//$ 平面 ADB_1（提示：面面平行的判定定理），所以 D 正确. 而 EF,A_1M 均与平面 A_1EN 相交，所以 EF,A_1M 均与平面 ADB_1 相交，A，B 都不正确. 又 MN 与 AC 平行，AC 与平面 ADB_1 相交，所以 MN 与平面 ADB_1 也相交，且 $MN\subset$ 平面 EMN，所以 C 不正确. 故选 ABC.



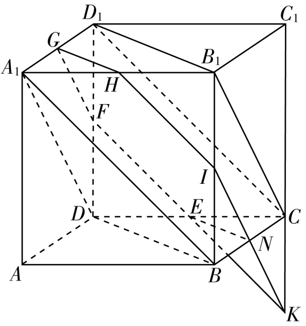
3. AB 【解析】对于 A，因为平面 $\alpha//$ 平面 β，$CD\subset\beta$，所以 $CD//\alpha$，故 A 正确；

对于 B，设由 PC 与 PD 所确定的平面为 γ，因为平面 $\alpha//$ 平面 β，平面 $\alpha\cap$ 平面 $\gamma=AB$，平面 $\beta\cap$ 平面 $\gamma=CD$，所以 $AB//CD$，所以 $\dfrac{PA}{PC}=\dfrac{AB}{CD}$，即 $\dfrac{2}{2+AC}=\dfrac{1}{3}$，解得 $AC=4$，故 B 正确；

对于 C，若 $PB=1$，则 $PB+AB=PA$，这与三角形三边关系定理相矛盾，故 C 错误；

对于 D，若 $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{AB}{CD}$，则 $\dfrac{PA}{AB}=\dfrac{PB}{CD}$，而由 $AB//CD\Rightarrow\dfrac{PA}{AB}=\dfrac{PC}{CD}$，但 PB 与 PC 长度关系不确定，故 D 错误. 故选 AB.

4. B 【解析】如图，在正方体中，取 E，F,G,H,I 分别是 CD,DD_1,A_1D_1,A_1B_1，BB_1 的中点.



因为 N 为 BC 的中点，所以 $BD/\!/EN$，

又 $A_1B/\!/D_1C$，$EF/\!/D_1C$，则 $A_1B/\!/EF$.

由 $BD\subset$ 平面 A_1BD，$EN\not\subset$ 平面 A_1BD，则 $EN/\!/$平面 A_1BD，同理可得 $EF/\!/$平面 A_1BD，

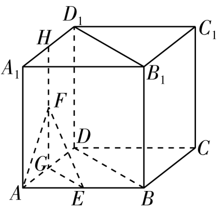
由 $EN\cap EF=E$，EN，$EF\subset$ 平面 $EFGHIN$，故平面 $EFGHIN/\!/$平面 A_1BD，

所以平面 $EFGHIN$ 中的直线平行于平面 A_1BD，

由 $MN/\!/$平面 A_1BD 且点 M 在平面 DCC_1D_1 内运动，得 M 在直线 EF 上运动，要使 MN 最小，只需 $MN\perp EF$. 延长 FE，C_1C 交于 K，连接 NK，故只需求出$\triangle ENK$ 底边 EK 上的高即可，由已知可得 $CE=CK=CN=1$，则$\triangle ENK$ 是边长为$\sqrt{2}$的等边三角形，所以底边 EK 上的高为$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，即线段 MN 的最小值为$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. 故选 B.

5. B 【解析】如图，过点 F 作 $HG/\!/DD_1$，交 AD 于点 G，交 A_1D_1 于点 H.

连接 EG，AF. 因为 $HG/\!/DD_1$，$DD_1\perp GE$（提示：DD_1 为正方体的侧棱，GE 为底面 $ABCD$ 内的一条直线），所以 $HG\perp EG$，



所以 $EF^2=EG^2+FG^2=AE^2+AG^2+FG^2=$

AE^2+AF^2.

因为 $HG//DD_1$, $HG\not\subset$ 平面 BDD_1B_1, $DD_1\subset$ 平面 BDD_1B_1, 所以 $HG//$ 平面 BDD_1B_1.

因为 $EF//$ 平面 BDD_1B_1, $FG//$ 平面 BDD_1B_1, $EF\cap FG=F$, EF, $FG\subset$ 平面 EFG, 所以平面 $EFG//$ 平面 BDD_1B_1(提示:面面平行的判定定理).

又 $GE\subset$ 平面 EFG, 所以 $GE//$ 平面 BDD_1B_1,

又平面 $ABCD\cap$ 平面 $BDD_1B_1=BD$, $GE\subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $GE//BD$(提示:线面平行的性质定理).

因为 E 为 AB 的中点, 所以 G 为 AD 的中点, 则 H 为 A_1D_1 的中点.

因为 F 在线段 GH 上,

所以 $AF_{\min}=AG=\dfrac{a}{2}$, $AF_{\max}=AH=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+a^2}=\dfrac{\sqrt{5}a}{2}$,

所以 $EF_{\min}=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}=\sqrt{2}$, 解得 $a=2$,

$b=EF_{\max}=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{5}a}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a=\sqrt{6}$,

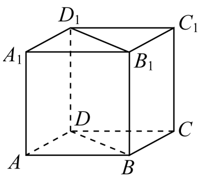
所以 $b^a=6$. 故选 B.

6. ①② 【解析】两个平面有无数个公共点, 这两个平面不一定重合, 还可能相交;

若 l, m 是异面直线, $l//\alpha$, $m//\beta$, 可能 $\alpha//\beta$, 还可能相交.

如图, 可借助正方体作为模型验证.

直线 AA_1 与 C_1D_1 异面, $AA_1//$ 平面 BDD_1B_1, $C_1D_1//$ 平面 $ABCD$, 但平面 BDD_1B_1 与平面 $ABCD$ 相交.

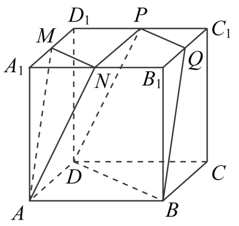


7. AD 【解析】A 正确；B 不正确，过一点有无数条直线与已知直线垂直；C 不正确，过平面外一点有无数条直线与该平面平行；D 正确. 故选 AD.

8. B 【解析】如图，取 C_1D_1 的中点 P，B_1C_1 的中点 Q，连接 PQ,PD,QB,NP. 易知 $MN//BD$. 因为 $AD//NP$，$AD=NP$，所以四边形 $ANPD$ 为平行四边形，所以 $AN//DP$.

又 BD 和 DP 为平面 $DBQP$ 的两条相交直线，MN,AN 为平面 AMN 的两条相交直线，所以平面 $DBQP$ // 平面 AMN，则四边形 $DBQP$ 的面积即为所求.

因为 $PQ//DB$，$PQ=\frac{1}{2}BD=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以四边形 $DBQP$ 为梯形. 易知 $DP=BQ=\frac{\sqrt{5}}{2}$，梯形 $DBQP$ 的高 $h=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 故所求面积为 $\frac{1}{2}(PQ+BD)\cdot h=\frac{9}{8}$. 故选 B.



9. $(8,10)$ 【解析】∵ $AC//$平面 $EFGH$，$AC\subset$ 平面 ACD，平面 $ACD\cap$ 平面 $EFGH=GH$，∴ $AC//GH$. 同理 $EF//AC$，∴ $EF//GH$. 同理 $EH//FG//BD$.

∴ 四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

由 $AC//GH$，$EH//BD$，

可设 $\frac{DH}{DA}=\frac{GH}{AC}=k$ $(0<k<1)$，

则 $\frac{AH}{DA}=\frac{EH}{BD}=1-k$，

∴ $GH=5k$，$EH=4(1-k)$，∴ 周长 $=8+2k$.

又∵ $0<k<1$，∴ 四边形 $EFGH$ 周长的取值范围为 $(8,10)$.

10. (1)【证明】因为 E,F 分别为线段 AC_1,A_1C_1 上的点，$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC_1}$，$\overrightarrow{A_1F}=\lambda\overrightarrow{A_1C_1}$，$\lambda\in(0,1)$，

所以 $EF//AA_1$. 又因为 $BB_1//AA_1$，所以 $EF//BB_1$.

又因为 $EF\not\subset$ 平面 BCC_1B_1，$BB_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $EF//$平面 BCC_1B_1.

(2)【解】存在，理由如下：取 BC_1 上的点 G，满足 $\overrightarrow{BG}=\lambda\overrightarrow{BC_1}$，$\lambda\in(0,1)$，

连接 GE,GF，

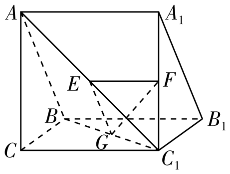
则 $GE//BA$.

因为 $GE\not\subset$ 平面 ABB_1A_1，$BA\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $GE//$平面 ABB_1A_1，

同理可得，$EF//$平面 ABB_1A_1，又因为 $EF\cap GE=E$，$GE,EF\subset$平面 EFG，

所以平面 $EFG//$平面 ABB_1A_1，

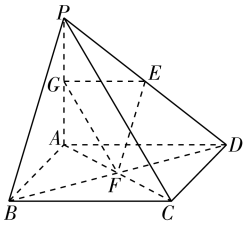
故在线段 BC_1 上存在一点 G，使平面 $EFG//$平面 ABB_1A_1.



11.【证明】(1)在四棱锥 $P-ABCD$ 中，连接 BD，根据底面 $ABCD$ 是平行四边形，得 F 是 BD 的中点，

又 E 是 PD 的中点，则 $EF//PB$. 因为 $EF\not\subset$平面 PAB，$PB\subset$平面 PAB，所以 $EF//$平面 PAB，

又平面 $PAB\cap$平面 $EFG=l$，$EF\subset$平面 EFG，所以 $EF//l$.



(2)由 G,F 分别是 PA,AC 的中点，得 $FG//PC$，

因为 $FG\not\subset$平面 PBC，$PC\subset$平面 PBC，

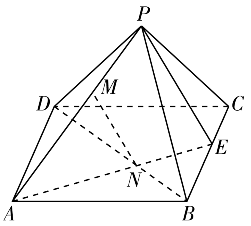
所以 $FG//$平面 PBC.

由(1)知 $EF//PB$,因为 $EF\not\subset$平面 PBC, $PB\subset$平面 PBC,所以 $EF//$平面 PBC.

又 $EF\cap FG=F$, EF, $FG\subset$平面 EFG,所以平面 $EFG//$平面 PBC.

12.【解】存在, $BN:ND=5:8$, $MN=7$.

理由如下:



连接 AN 并延长,交 BC 于点 E,连接 PE.

因为在正方形 $ABCD$ 中, $AD//BC$,所以$\frac{EN}{NA}=\frac{BN}{ND}=\frac{5}{8}$.

又因为$\frac{PM}{MA}=\frac{5}{8}$,所以 $MN//PE$.

又 $PE\subset$平面 PBC, $MN\not\subset$平面 PBC,所以 $MN//$平面 PBC.

所以 $BE:AD=5:8$,所以 $BE=\frac{65}{8}$.

在$\triangle PBE$中, $PE^2=PB^2+BE^2-2PB\cdot BE\cos 60°=13^2+\left(\frac{65}{8}\right)^2-2\times13\times\frac{65}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{8\ 281}{64}$,所以 $PE=\frac{91}{8}$.

因为 $MN//PE$,

所以 $MN:PE=8:13$,

所以 $MN=\frac{91}{8}\times\frac{8}{13}=7$.

13. D　【解析】过点 M 作 $MM_1\perp AD$ 于点 M_1,过点 N 作 $NN_1\perp CD$ 于点 N_1,连接 M_1N_1,如图所示.

$\because NN_1//C_1C$,且 $C_1C\subset$平面 A_1ACC_1, $NN_1\not\subset$平面 A_1ACC_1,

$\therefore NN_1//$平面 A_1ACC_1.

$\because MN//$平面 ACC_1A_1, $NN_1\cap MN=N$, NN_1, $MN\subset$平面 MNN_1M_1,

$\therefore$ 平面 $MNN_1M_1//$平面 A_1ACC_1.

$\because$ 平面 $ABCD$ 与平面 MNN_1M_1、平面 A_1ACC_1 分别交于 M_1N_1，AC，

$\therefore M_1N_1 // AC$.

设 $DM_1=DN_1=x\ (x\in[0,1])$，则 $MM_1=x$，$NN_1=1-x$.

$\because MM_1 // AA_1$，$NN_1 // CC_1$，$AA_1 // CC_1$，

$\therefore MM_1 // NN_1$，又 $AC // M_1N_1$，$AA_1\perp AC$，由等角定理可知 $MM_1\perp M_1N_1$，

$\therefore$ 四边形 MNN_1M_1 为直角梯形或矩形.

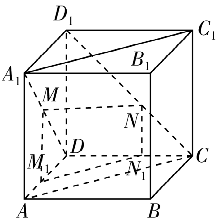
当四边形 MNN_1M_1 为直角梯形时，

$MN^2=(\sqrt{2}x)^2+(1-2x)^2=6\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$，

$\therefore$ 当 $x=\frac{1}{3}$ 时，MN 的值最小，最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

当四边形 MNN_1M_1 为矩形时，点 M，N 分别为 A_1D，D_1C 的中点，此时 $MN^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，$MN=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because \frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore MN$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



课时2　平面与平面垂直的判定及性质

1. C　【解析】已知 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，可得 $PA\perp AD$，$PA\perp CD$. 又底面 $ABCD$ 为矩形，$\therefore AD\perp AB$，$CD\perp AD$.

$\because AB\cap PA=A$，$AD\cap PA=A$，AB，$PA\subset$ 平面 PAB，AD，$PA\subset$ 平面 PAD，

$\therefore AD\perp$ 平面 PAB，$CD\perp$ 平面 PAD.

$\therefore$ 平面 $PAD\perp$ 平面 PAB，平面 $PCD\perp$ 平面 PAD.

又 $BC // AD$，$\therefore BC\perp$ 平面 PAB，$\because BC\subset$ 平面 PBC，$\therefore$ 平面 $PBC\perp$ 平面 PAB.

选项 A，B，D 得证. 故选 C.

2. C 【解析】在 A 中,若 $m//\alpha$,$m//\beta$,则 α 与 β 相交或平行,故 A 错误;

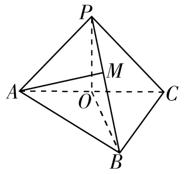
在 B 中,若 $m\perp\alpha$,$m\perp n$,则 $n//\alpha$ 或 $n\subset\alpha$,故 B 错误;

在 C 中,若 $m\perp\alpha$,$m//n$,则由线面垂直的性质可得 $n\perp\alpha$,故 C 正确;

在 D 中,若 $\alpha\perp\beta$,$m\perp\alpha$,则 $m//\beta$ 或 $m\subset\beta$,故 D 错误.

故选 C.

3. A 【解析】对于 A,取 AC 的中点 O,连接 OB,OP,如图. 因为 $\angle ABC=90°$,所以 $OA=OB=OC$. 因为 $PA=PC$,所以 $PO\perp AC$,所以 $PO^2+AO^2=PA^2$. 因为 $PA=PB=PC$,所以 $PO^2+BO^2=PB^2$,所以 $PO\perp OB$. 因为 $AC\cap OB=O$,AC,$OB\subset$平面 ABC,所以 $PO\perp$平面 ABC. 因为 $PO\subset$平面 PAC,所以平面 $PAC\perp$平面 ABC. 所以 A 正确.



对于 C,假设 $PB\perp$平面 ABC,则由 $PO\perp$平面 ABC,可得过平面 ABC 外一点 P 有两条直线与平面 ABC 垂直,这与过平面外一点只有一条直线与此平面垂直相矛盾,所以 C 错误.

对于 D,假设 $BC\perp$平面 PAB,因为 $PB\subset$平面 PAB,所以 $PB\perp BC$,所以 $\angle PBC=90°$. 因为 $PB=PC$,所以 $\angle PBC=\angle PCB=90°$,所以 $\triangle PBC$ 的 3 个内角和大于 $180°$,这与三角形内角和定理相矛盾,所以 D 错误.

对于 B,假设平面 $PAB\perp$平面 PBC,过 A 作 $AM\perp PB$ 于 M. 因为平面 $PAB\cap$平面 $PBC=PB$,$AM\subset$平面 PAB,所以 $AM\perp$平面 PBC. 因为 $BC\subset$平面 PBC,所以 $AM\perp BC$. 因为 $AB\perp BC$,$AM\cap AB=A$,AM,$AB\subset$平面 PAB,所以 $BC\perp$平面 PAB,选项 D 中已证实不可能成

立，所以平面 PAB 与平面 PBC 不垂直，所以 B 错误.

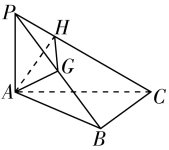
故选 A.

4. (1)【证明】$\because PA\perp$平面 ABC，AB，AC，$BC\subset$平面 ABC，

$\therefore PA\perp AB$，$PA\perp AC$，$PA\perp BC$，

$\therefore \triangle PAB$ 和$\triangle PAC$ 为直角三角形.

过点 A 作 $AG\perp PB$，垂足为 G，如图.



$\because$ 平面 $PAB\perp$平面 PBC，平面 $PAB\cap$平面 $PBC=PB$，且 $AG\subset$平面 PAB，

$\therefore AG\perp$平面 PBC.

$\because BC\subset$平面 PBC，$\therefore AG\perp BC$.

又 $AG\cap PA=A$，AG，$PA\subset$平面 PAB，

$\therefore BC\perp$平面 PAB，$\because PB$，$AB\subset$平面 PAB，

$\therefore BC\perp PB$，$BC\perp AB$，即$\triangle PBC$ 和$\triangle ABC$ 为直角三角形.

$\therefore$ 四面体 $P-ABC$ 为“鳖臑”.

(2)【解】过点 G 作 $GH\perp PC$，垂足为 H，连接 AH.

由(1)知 $AG\perp$平面 PBC，$\because PC\subset$平面 PBC，$\therefore AG\perp PC$.

又 $GH\perp PC$，$AG\cap GH=G$，AG，$GH\subset$平面 AGH，

$\therefore PC\perp$平面 AGH，$\because AH\subset$平面 AGH，

$\therefore PC\perp AH$，

$\therefore \angle AHG$ 为二面角 $A-PC-B$ 的平面角，即$\angle AHG=\dfrac{\pi}{3}$.

$\because \angle BAC=\dfrac{\pi}{4}$，设 $AB=BC=x$，$x>0$，

$\therefore AG=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$，$AH=\dfrac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+4}}$.

在 Rt$\triangle AGH$ 中，$\sin\angle AHG=\dfrac{AG}{AH}=$

$\dfrac{\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}}{\dfrac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+4}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\dfrac{\sqrt{2x^2+4}}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得

$x=2$，∴ AB 的长度为 2.

5. C 【解析】连接 $B'C$(图略). 因为 AD 是等腰直角三角形 ABC 的斜边 BC 上的高，所以 $BD=DC=\frac{\sqrt{2}}{2}AC$，$\angle ADC=\angle ADB=90°$，所以 $\angle B'DC$ 是二面角 $B'-AD-C$ 的平面角.

因为 $\angle B'AC=60°$，且 $AB'=AC$，所以 $\triangle B'AC$ 是等边三角形，所以 $B'C=AB'=AC$. 则在 $\triangle B'DC$ 中，$\angle B'DC=90°$.

6. C 【解析】对于①，由题意得，$BB_1 /\!/ AA_1$，则直线 AD_1 与直线 BB_1 所成的角与直线 AD_1 与直线 AA_1 所成的角相等，即 $\angle A_1AD_1$. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=1$，$AB=BC=\sqrt{3}$，所以 $\tan\angle A_1AD_1=\frac{A_1D_1}{A_1A}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$，因为 $0°<\angle A_1AD_1<90°$，所以 $\angle A_1AD_1=60°$，即直线 AD_1 与直线 BB_1 所成的角为 $60°$，故①正确；

对于②，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BC\perp$ 平面 CC_1D_1D，所以直线 BC_1 与平面 CC_1D_1D 所成的角为 $\angle BC_1C$，因为 $\tan\angle BC_1C=\frac{BC}{C_1C}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$，$0°<\angle BC_1C<90°$，所以 $\angle BC_1C=60°$，则直线 BC_1 与平面 CC_1D_1D 所成的角为 $60°$，故②正确；

对于③，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB\perp$ 平面 BB_1C_1C，$BC_1\subset$ 平面 BB_1C_1C，$BC\subset$ 平面 BB_1C_1C，所以 $BC_1\perp AB$，$BC\perp AB$，又因为平面 $ABC_1D_1\cap$ 平面 $ABCD=AB$，所以平面 ABC_1D_1 与平面 $ABCD$ 所成的二面角的平面角为 $\angle CBC_1$，由②得，$\angle CBC_1=90°-\angle BC_1C=90°-60°=30°$，则平面 ABC_1D_1 与平面 $ABCD$ 所成的二面角为 $30°$，故③错误；

对于④，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB\perp$ 平面 ADD_1A_1，$AB\subset$ 平面 ABC_1D_1，所以平面 $ABC_1D_1\perp$ 平面 ADD_1A_1，则平面 ABC_1D_1 与平面 ADD_1A_1 所成的二面角为直二面角，故④正确. 故选 C.

7. (1)【证明】由底面 $ABCD$ 为正方形，得 $BC\perp CD$，又 $BC\subset$ 底面 $ABCD$，

侧面 $CDD_1C_1\perp$ 底面 $ABCD$，侧面 $CDD_1C_1\cap$ 底面 $ABCD=CD$，则 $BC\perp$ 平面 CDD_1C_1，而 $BC\subset$ 平面 A_1BC，所以平面 $A_1BC\perp$ 平面 CDD_1C_1.

(2)【解】在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，连接 AB_1 交 A_1B 于点 O，连接 C_1O，AC_1，

由 $AB=AA_1=2$，$\angle A_1AB=\dfrac{\pi}{3}$，得 $\square ABB_1A_1$ 是菱形，且 $\triangle A_1BB_1$ 是正三角形，

则 $AB_1\perp A_1B$，由(1)知 $BC\perp$ 平面 CDD_1C_1，而 $B_1C_1\parallel BC$，则 $B_1C_1\perp$ 平面 CDD_1C_1，

又平面 $CDD_1C_1\parallel$ 平面 ABB_1A_1，于是 $B_1C_1\perp$ 平面 ABB_1A_1，又 $A_1B\subset$ 平面 ABB_1A_1，

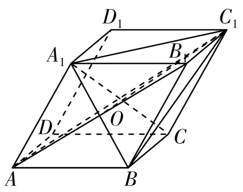
则 $B_1C_1\perp A_1B$，而 $AB_1\cap B_1C_1=B_1$，AB_1，$B_1C_1\subset$ 平面 AB_1C_1，因此 $A_1B\perp$ 平面 AB_1C_1，

又 $C_1O\subset$ 平面 AB_1C_1，则 $C_1O\perp A_1B$，所以 $\angle AOC_1$ 为二面角 $A-A_1B-C_1$ 的平面角，

在 $\mathrm{Rt}\triangle B_1OC_1$ 中，$B_1C_1=2$，$B_1O=\sqrt{3}$，

则斜边 $C_1O=\sqrt{7}$，

所以 $\sin\angle AOC_1=\sin\angle B_1OC_1=\dfrac{B_1C_1}{C_1O}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，即二面角 $A-A_1B-C_1$ 的平面角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.



8. (1)【证明】在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC\ /\!/\ A_1C_1$，$AC=2A_1A=2A_1C_1=2C_1C=2$，

在等腰梯形 A_1ACC_1 中，$\cos\angle ACC_1=\dfrac{\frac{1}{2}(AC-A_1C_1)}{C_1C}=\dfrac{1}{2}$，

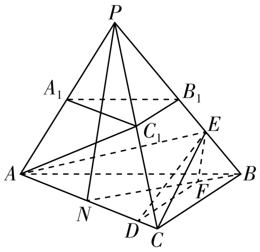
则 $\angle ACC_1=60°$，

由余弦定理得 $AC_1^2=AC^2+C_1C^2-2AC\cdot C_1C\cos\angle ACC_1=3$，

则 $AC^2=AC_1^2+C_1C^2$，即 $AC_1\perp C_1C$，

而平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 B_1BCC_1，平面 $A_1ACC_1\cap$ 平面 $B_1BCC_1=C_1C$，

$AC_1\subset$ 平面 A_1ACC_1，则 $AC_1\perp$ 平面 B_1BCC_1，又 $BC\subset$ 平面 B_1BCC_1，所以 $AC_1\perp BC$.



(2)【解】延长三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱 AA_1,BB_1,CC_1 交于点 P，

由(1)得 $\triangle PAC$ 为正三角形，

因为 $AC_1\perp BC$，$AC\perp BC$，$AC\cap AC_1=A$，$AC,AC_1\subset$ 平面 PAC，所以 $BC\perp$ 平面 PAC，又 $BC\subset$ 平面 ABC，则平面 $ABC\perp$ 平面 PAC，

取 AC 中点 N，连接 PN,BN，则 $PN\perp AC$，且 $PN=\sqrt{3}$，

而平面 $ABC\cap$ 平面 $PAC=AC$，$PN\subset$ 平面 PAC，则 $PN\perp$ 平面 ABC，

过 E 作 $EF/\!/PN$ 交 BN 于点 F，

则 $EF\perp$ 平面 ABC，

而 $AC\subset$ 平面 ABC，则 $AC\perp EF$，

过 E 作 $ED\perp AC$ 与 AC 交于点 D，连接 FD，

又 $ED\cap EF=E$，$ED,EF\subset$ 平面 DEF，则 $AC\perp$ 平面 DEF，

又 $FD\subset$ 平面 DEF，则 $AC\perp FD$，

则$\angle EDF$为二面角$E-AC-B$的平面角，

若存在点E使得二面角$E-AC-B$的平面角的正切值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$，

则$\tan\angle EDF=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

设$EF=\sqrt{3}t$，$t\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，则$FD=4t$，

因为$\frac{EF}{PN}=\frac{BF}{BN}=\frac{CD}{CN}$，$\frac{FD}{BC}=\frac{DN}{CN}$，则$\frac{EF}{PN}+\frac{FD}{BC}=\frac{CD}{CN}+\frac{DN}{CN}=1$，

即$\frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{3}}+\frac{4t}{2}=1$，解得$t=\frac{1}{3}$，

$BN=\sqrt{NC^2+BC^2}=\sqrt{5}$，$PB=\sqrt{PN^2+BN^2}=2\sqrt{2}$，$B_1B=\sqrt{2}$，

所以$\frac{BE}{PB}=\frac{EF}{PN}$，即$\frac{BE}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{3}$，$BE=\frac{2\sqrt{2}}{3}<B_1B=\sqrt{2}$，

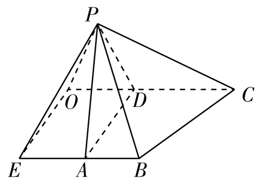
所以线段B_1B上存在满足题意的点E，且$BE=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

9. (1)【证明】因为平面$ABCD\perp$平面PCD，平面$ABCD\cap$平面$PCD=CD$，$AD\subset$平面$ABCD$，$AD\perp DC$，

所以$AD\perp$平面PCD，又$PC\subset$平面PCD，所以$AD\perp PC$.

(2)【解】若选①，过点P作$PO\perp CD$交CD的延长线于点O.

因为平面$ABCD\perp$平面PCD，平面$PCD\cap$平面$ABCD=CD$，$PO\subset$平面PCD，所以$PO\perp$平面$ABCD$.



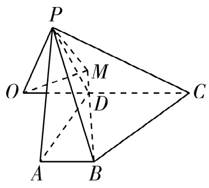
过O作$OE//AD$交BA的延长线于点E，连接PE. 因为$AB//CD$，$AD\perp CD$，所以$OE\perp AB$.

因为$PO\perp$平面$ABCD$，$AB\subset$平面

$ABCD$,所以 $PO\perp AB$,因为 $PO\cap OE=O$,$PO\subset$平面 POE,$OE\subset$平面 POE,所以 $AB\perp$平面 POE,又 $PE\subset$平面 POE,所以 $AB\perp PE$,所以 $\angle PEO$ 就是二面角 $P-AB-C$ 的平面角. 由题意得 $PO=PD\cdot\sin 60^\circ=\sqrt{3}$,$OE=AD=2$,所以 $PE=\sqrt{7}$,所以 $\cos\angle PEO=\frac{2\sqrt{7}}{7}$,即二面角 $P-AB-C$ 的余弦值为$\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

若选②,过点 P 作 $PO\perp CD$ 交 CD 的延长线于点 O,连接 BD.

因为平面 $PCD\perp$平面 $ABCD$,平面 $PCD\cap$平面 $ABCD=CD$,$PO\subset$平面 PCD,所以 $PO\perp$平面 $ABCD$.



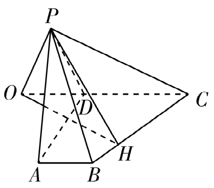
过点 O 作 $OM\perp BD$ 交 BD 的延长线于点 M,连接 PM. 因为 $PO\perp$平面 $ABCD$,$BD\subset$平面 $ABCD$,所以 $PO\perp BD$,

因为 $PO\cap OM=O$,$PO\subset$平面 POM,$OM\subset$平面 POM,所以 $BD\perp$平面 POM. 又 $PM\subset$平面 POM,所以 $BD\perp PM$,所以 $\angle PMO$ 为二面角 $P-BD-C$ 的平面角的补角. 易算得 $OM=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$PM=\frac{\sqrt{95}}{5}$,$\cos\angle PMO=\frac{OM}{PM}=\frac{2\sqrt{19}}{19}$,

所以二面角 $P-BD-C$ 的余弦值为$-\frac{2\sqrt{19}}{19}$.

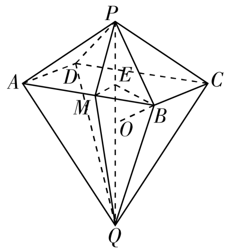
若选③,过点 P 作 $PO\perp CD$ 交 CD 的延长线于点 O.

因为平面 $PCD\perp$平面 $ABCD$,平面 $PCD\cap$平面 $ABCD=CD$,$PO\subset$平面 PCD,



所以 $PO\perp$平面 $ABCD$. 过点 O 作 $OH\perp BC$ 交 BC 于点 H,连接 PH. 因为 $PO\perp$平面 $ABCD$,$BC\subset$平面 $ABCD$,所以 $PO\perp BC$,又 $PO\cap OH=O$,$PO\subset$平面 POH,$OH\subset$平面 POH,所以 $BC\perp$平面 POH,又 $PH\subset$平面 POH,所以 $BC\perp PH$,所以$\angle PHO$ 为二面角 $P-BC-D$ 的平面角. 易算得 $OH=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$,$PH=\dfrac{\sqrt{255}}{5}$,所以 $\cos\angle PHO=\dfrac{OH}{PH}=\dfrac{2\sqrt{51}}{17}$,所以二面角 $P-BC-D$ 的余弦值为$\dfrac{2\sqrt{51}}{17}$.

10. $(-\infty,-2\sqrt{2}]$ 【解析】设 PQ 与平面 $ABCD$ 的交点为 E,则 E 为正方形 $ABCD$ 的中心,连接 BE,OB,取 AB 中点为 M,连接 PM,QM,EM,则 $EM\perp AB$,$PM\perp AB$,$QM\perp AB$,如图所示.



设二面角 $P-AB-C$ 的大小为 α,二面角 $Q-AB-C$ 的大小为 β,

则$\angle PME=\alpha$,$\angle QME=\beta$,设球 O 的半径为 1,球心 O 到平面 $ABCD$ 的距离为 d,$d\in[0,1)$,则 $EM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}EB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{OB^2-OE^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-d^2}$,$PE=1-d$,$QE=1+d$,

$\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{2}(1-d)}{\sqrt{1-d^2}}$,$\tan\beta=\dfrac{\sqrt{2}(1+d)}{\sqrt{1-d^2}}$,

$\tan\theta=\tan(\alpha+\beta)=$

$$\frac{\dfrac{\sqrt{2}(1-d)}{\sqrt{1-d^2}}+\dfrac{\sqrt{2}(1+d)}{\sqrt{1-d^2}}}{1-\dfrac{\sqrt{2}(1-d)}{\sqrt{1-d^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}(1+d)}{\sqrt{1-d^2}}}=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-d^2}}\in$$

$(-\infty,-2\sqrt{2}]$.

13.3　空间图形的表面积和体积

13.3.1　空间图形的表面积

1. D　【解析】设圆锥母线长为 l，底面圆的半径为 r，$\frac{3\pi}{4}=\frac{2\pi r}{l}$，所以 $l=\frac{8}{3}r$，圆锥表面积 $A=\pi r^2+\pi rl=\frac{11}{3}\pi r^2$，扇形面积 $B=\pi rl=\frac{8}{3}\pi r^2$，

所以 $A:B=11:8$. 故选 D.

2. B　【解析】因为圆台的上、下底面半径和高的比为 1∶4∶4，母线长为 10，设圆台上底面的半径为 r，则下底面半径和高分别为 $4r$ 和 $4r$，由 $100=(4r)^2+(4r-r)^2$，得 $r=2$，故圆台的侧面积等于 $\pi(r+4r)\times10=100\pi$. 故选 B.

3. $180\ \text{cm}^2$　【解析】设正六棱柱的底面边长为 a cm，

则底面上最长对角线长为 $2a$ cm，

所以由 $\sqrt{5^2+(2a)^2}=13$，解得 $a=6$，

所以侧面积为 $5\times6a=5\times6\times6=180(\text{cm}^2)$.

4. C　【解析】设长方体底面长方形的长与宽分别为 a，b，则 $ab=12$.

又由题意知 $\sqrt{a^2+b^2}\cdot2=10$，解得 $a=4$，$b=3$，故长方体的侧面积为 $2\times(4+3)\times2=28$，故选 C.

5. A　【解析】设圆锥的底面半径为 r，母线长为 l，则圆锥底面周长为 $2\pi r=\frac{1}{2}\times2\pi l$，得 $l=2r$，

所以圆锥的侧面积为 $\frac{1}{2}\pi l^2=\frac{1}{2}\pi\times(2r)^2=2\pi r^2$，底面积为 πr^2，

所以侧面积与底面积的比值为 2. 故选 A.

6. A　【解析】因为底面正三角形中高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$，其重心到顶点的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a\times$

$\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，且棱锥高为 $\frac{\sqrt{6}}{6}a$，所以利用直角三角形勾股定理可得侧棱长为 $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{6}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，斜高为 $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{a}{2}$，所以侧面积为 $3\times\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}a=\frac{3}{4}a^2$. 故选 A.

7. B 【解析】设该正方体的棱长为 $x(x>0)$，则正四面体 $B-A_1C_1D$ 的棱长为 $\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2}x$，

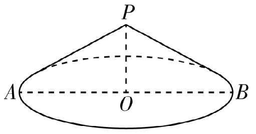
所以该正四面体的表面积 $S=4\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}x\cdot\sqrt{2}x\sin 60^\circ=2\sqrt{3}x^2=a^2$，

所以 $x^2=\frac{a^2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}a^2}{6}$，

故该正方体的表面积 $S_1=6x^2=\sqrt{3}a^2$.

故选 B.

8. B 【解析】作出圆锥 PO 的示意图，如图所示，



设圆锥的底面半径为 r，母线长为 l，由题意知，$r=OB=\frac{1}{2}AB=3$（m），在 Rt△POB 中，$\angle BPO=\frac{1}{2}\angle BPA=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，所以 $l=BP=\frac{OB}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$（m），所以圆锥侧面积为 $\pi rl=\pi\times3\times2\sqrt{3}=6\sqrt{3}\pi$（$m^2$）. 故选 B.

9. A 【解析】由题可知，$CC_1\perp AC$，$CC_1\perp CB$.

又 $AC=2$，$A_1C_1=1$，$CC_1=1$，

所以 $S_{梯形BB_1C_1C}=S_{梯形AA_1C_1C}=\frac{1}{2}\times(1+2)\times1=\frac{3}{2}$.

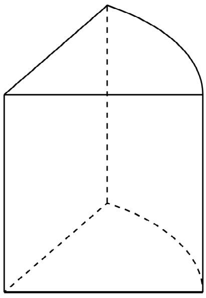
在梯形 A_1ABB_1 中，易知 $A_1B_1=\sqrt{2}$，

$AB=2\sqrt{2}$, $AA_1=BB_1=\sqrt{2}$,

所以 $S_{梯形A_1ABB_1}=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\times\sqrt{2-\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

所以三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面积 $S_{侧}=S_{梯形BB_1C_1C}+S_{梯形AA_1C_1C}+S_{梯形A_1ABB_1}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{6+3\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.

10. $2+\frac{2\pi}{3}$ 【解析】由题意可得该几何体为底面半径为 1,高为 1 的圆柱的 $\frac{1}{6}$,如图所示.



所以该几何体的表面积 $S=2\times1\times1+2\times\frac{1}{6}\times\pi\times1^2+\frac{1}{6}\times2\pi\times1\times1=2+\frac{2\pi}{3}$.

13.3.2 空间图形的体积

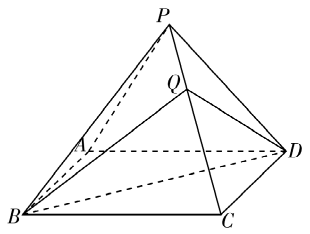
1. B 【解析】设正六棱柱的底面边长为 a m,高为 h m,则 $2ah=1$,$\sqrt{3}a=1$,解得 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$h=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以六棱柱的体积 $V=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}(\text{m}^3)$. 故选 B.

2. D 【解析】依题意画出图形如图所示,因为底面 $ABCD$ 为平行四边形,所以 $V=V_{P-ABCD}=2V_{P-BCD}$.

因为 $\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PQ}$,所以 $V_{Q-BCD}=\frac{2}{3}V_{P-BCD}$,

则 $V_{Q-PBD}=V_{P-BCD}-V_{Q-BCD}=\frac{1}{3}V_{P-BCD}=\frac{1}{6}V_{P-ABCD}=\frac{V}{6}$.



3. B 【解析】取 AC 中点 D，连接 BD（图略），则 $BD\perp AC$，则旋转体是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 绕 AC 所在直线旋转形成两个圆锥的空间图形. 由已知可得 $AD=CD=3$，$BD=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

故所求几何体的体积 $V=\frac{1}{3}\pi\times4^2\times3\times2=32\pi$. 故选 B.

4. C 【解析】因为甲、乙两个圆柱的底面面积分别为 S_1,S_2，且 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{16}{9}$，

所以甲、乙两个圆柱的底面半径 R_1，R_2 满足 $\frac{R_1}{R_2}=\frac{4}{3}$，

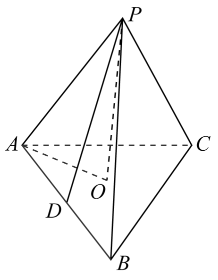
所以甲、乙两个圆柱的底面周长 C_1，C_2 满足 $\frac{C_1}{C_2}=\frac{4}{3}$.

又因为甲、乙两个圆柱的侧面积相等，

所以甲、乙两个圆柱的高 H_1,H_2 满足 $\frac{H_1}{H_2}=\frac{3}{4}$，所以甲、乙两个圆柱的体积 V_1,V_2 满足 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{S_1H_1}{S_2H_2}=\frac{16}{9}\times\frac{3}{4}=\frac{4}{3}$.

故选 C.

5. AB 【解析】如图，取 $\triangle ABC$ 的中心为 O，连接 PO，由题意得 $PO\perp$ 平面 ABC.

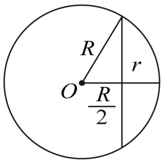


又 $\triangle ABC$ 为等边三角形，则 $AO=\frac{2}{3}\times\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$，所以正三棱锥的高 $PO=\sqrt{PA^2-AO^2}=\sqrt{12-3}=3$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times3\times3\times\sin60^\circ=\frac{9\sqrt{3}}{4}$，所以正三棱锥的体积

$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PO=\frac{9\sqrt{3}}{4}$. 过点 P 向 AB 作垂线，垂足为 D. 又 $PA=PB=2\sqrt{3}$，$AD=\frac{1}{2}AB=\frac{3}{2}$，则正三棱锥的斜高 $PD=\sqrt{PA^2-AD^2}=\frac{\sqrt{39}}{2}$，所以正三棱锥的侧面积 $S_{侧}=3\times\frac{1}{2}\cdot PD\cdot AB=3\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{39}}{2}\times3=\frac{9\sqrt{39}}{4}$. 故选 AB.

6. C 【解析】设三个球的半径分别为 1，2，3，则最大球的体积 $V_3=\frac{4}{3}\pi\times3^3=36\pi$，两个小球的体积和 $V_1+V_2=\frac{4}{3}\pi(1^3+2^3)=12\pi$. 所以最大球的体积是其他两个球的体积和的 3 倍.

7. A 【解析】如图，过球心 O 作球的截面，设球的半径为 R，截面圆的半径为 r，则有 $r=\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}R$，



则截面的面积 $S_{截面}=\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2=\frac{3}{4}\pi R^2$，故 $\frac{S_{截面}}{S_{球}}=\frac{\frac{3}{4}\pi R^2}{4\pi R^2}=\frac{3}{16}$.

8. 3∶4 【解析】设三棱台的高为 h，上底面的面积是 S，则下底面的面积是 $4S$，所以 $V_{台}=\frac{1}{3}h(S+4S+2S)=\frac{7}{3}Sh$，所以 $V_1=Sh$，所以 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{Sh}{\frac{7}{3}Sh-Sh}=\frac{3}{4}$.

9. $\frac{7\sqrt{3}\pi}{3}$　11π　【解析】因为 $\triangle ABO_2$ 是边长为 2 的等边三角形，且 $O_1B/\!/O_2A$，所以 $O_1B=1$，圆台的高 $h=\sqrt{3}$，因此圆台的体积 $V=\frac{1}{3}\pi h(r_1^2+r_1r_2+$

$r_2^2)=\frac{7\sqrt{3}\pi}{3}$($r_1,r_2$ 分别为圆台上、下底面圆的半径)，

表面积 $S=\pi(r_1^2+r_1l+r_2l+r_2^2)=11\pi$($l$ 为圆台的母线长).

10.【解】由题意得，阴影部分旋转 180°形成的空间图形是一个圆锥从下面挖去一个圆柱所剩余的部分. 因为圆锥的底面半径为 2、母线长为 4、高为 $2\sqrt{3}$，圆柱的底面半径为 1、母线长为 $\sqrt{3}$，所以圆锥的表面积 $S_1=\pi\times2^2+\pi\times2\times4=12\pi$，圆柱的侧面积 $S_2=2\pi\times1\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}\pi$，圆锥的体积 $V_1=\frac{1}{3}\pi\times2^2\times2\sqrt{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$，圆柱的体积 $V_2=\pi\times1^2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}\pi$，则所求空间图形的表面积 $S=S_1+S_2=12\pi+2\sqrt{3}\pi$，体积 $V=V_1-V_2=\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi$.

11. A　【解析】设球 O 的半径为 R，则 $R^2-\frac{R^2}{4}=(\sqrt{3})^2$，解得 $R=2$，所以球 O 的体积 $V=\frac{4\pi}{3}R^3=\frac{32}{3}\pi$. 故选 A.

12. A　【解析】由题意，正四棱锥 $P-EFGH$ 的斜高为 $\sqrt{3+1}=2$，该空间图形的表面积为 $2\times2+4\times2\times1+4\times\frac{1}{2}\times2\times2=20$. 故选 A.

13. B　【解析】体积为$\frac{4\pi}{3}$的球 O 的半径为 1，该四棱锥的底面是边长为 4 的正方形，高为 5. 设四棱锥的外接球的半径为 R，则 $R^2=(5-R)^2+(2\sqrt{2})^2$，解得 $R=\frac{33}{10}$. 故选 B.

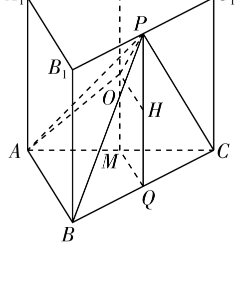
14. B　【解析】根据题意，该几何体的表面积分成两部分，一部分是 6 个完全相同的正方形，另一部分是 8 个完全相同的等边三角形.

6 个完全相同的正方形的面积之和

为 $6\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=12$，8 个完全相同的等边三角形的面积之和为 $8\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$，故该几何体的表面积为 $12+4\sqrt{3}$. 故选 B.

15. D 【解析】由题意，设球的半径为 r，作出玻璃杯的轴截面（图略），可得一个半径为 r 的圆内切于一个边长为 4 的等边三角形，此等边三角形的高 $h=2\sqrt{3}$. 根据重心的性质可得，球的半径 $r=\frac{1}{3}h=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi$，即溢出溶液的体积为 $\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi$，故选 D.

16. A 【解析】如图，分别取 AC，A_1C_1，BC 的中点 M，N，Q，连接 MN，PQ，MQ，则 $MN//CC_1//PQ$，因为 $CC_1\perp$ 平面 ABC，所以 $MN\perp$ 平面 ABC，$PQ\perp$ 平面 ABC. 因为 $AB\perp BC$，所以 M 即为 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心，所以四面体 $P-ABC$ 的外接球的球心 O 在 MN 上，连接 OA，OP. 设 $OM=x$，四面体 $P-ABC$ 的外接球的半径为 R，则 $OA=OP=R$，$AM=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{2}$，$MQ=\frac{1}{2}AB=2$，过点 O 作 $OH//MQ$ 交 PQ 于点 H，则 $OH=2$，则 $R^2=8+x^2=(4-x)^2+4$，解得 $x=\frac{3}{2}$，所以 $R=\sqrt{8+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{41}}{2}$，所以四面体 $P-ABC$ 的外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{41\sqrt{41}}{6}\pi$.



17. A 【解析】如图，由题意可知旋转角度为$\frac{\pi}{2}$，设上、下正方形的中心分别为O_1，O_2，连接O_1O_2，O_1A，AB，O_2B，OA，则O_1O_2的中点O即为外接球的球心，其中B为所在棱的中点，

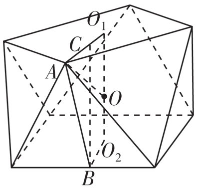
因为“四角反棱柱”的棱长均为4，可知$O_1A=2\sqrt{2}$，$O_2B=2$，$AB=2\sqrt{3}$.

过点B作$BC\perp O_1A$于C，四边形CBO_2O_1为矩形，则$AC=O_1A-O_2B=2\sqrt{2}-2$，$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{8\sqrt{2}}$，$O_1O_2=BC=\sqrt{8\sqrt{2}}$，$OO_1=\frac{1}{2}O_1O_2=\sqrt{2\sqrt{2}}$，

则$OA=\sqrt{OO_1^2+O_1A^2}=\sqrt{2\sqrt{2}+8}$，

即该“四角反棱柱”外接球的半径$R=\sqrt{2\sqrt{2}+8}$，

故该“四角反棱柱”外接球的表面积$S=4\pi R^2=4\pi\left(\sqrt{2\sqrt{2}+8}\right)^2=(8\sqrt{2}+32)\pi$，故选A.



18. $\frac{1}{6}$ 【解析】三棱锥D_1-EDF的体积即为三棱锥$F-DD_1E$的体积. 因为E，F分别为AA_1，B_1C上的点，所以正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中$\triangle EDD_1$的面积为定值$\frac{1}{2}$，点F到底面DD_1E的距离为定值1，所以$V_{D_1-EDF}=V_{F-DD_1E}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{6}$.

19. $\frac{14\pi}{3}$　$(15+\sqrt{5})\pi$ 【解析】由题意，将四边形$BCDE$绕直线CD旋转一周，所得几何体为圆台，圆台的上、下底面半径分别为1和2，高为2，故其体积$V=\frac{\pi}{3}(1^2+1\times2+2^2)\times2=\frac{14\pi}{3}$.

将四边形 $BCDE$ 绕直线 AB 旋转一周，所得几何体为一个底面半径和高均为 2 的圆柱，中间挖去一个底面半径为 1，高为 2 的圆锥.

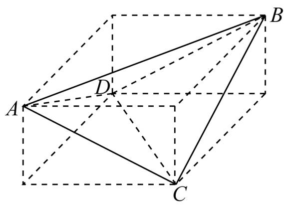
圆柱的表面积为 $2\times2^2\pi+2\times4\pi=16\pi$,

圆锥的底面积为 π,

圆锥的侧面积为 $1\times\sqrt{1^2+2^2}\pi=\sqrt{5}\pi$,

所以该几何体的表面积为 $16\pi-\pi+\sqrt{5}\pi=(15+\sqrt{5})\pi$.

20. $\frac{32}{3}$ 【解析】如图，将该四面体放在长方体中，因为 $AD=AC=BC=BD$，$AB=CD=4\sqrt{2}$，所以该长方体的长和宽都是 4，设该长方体的高为 h，球 O 的半径为 R，则 $R=\frac{\sqrt{16+16+h^2}}{2}$. 因为过点 A 作球 O 的截面，最大的截面面积为 9π，所以 $R=3$，则 $h=2$，故四面体 $A-BCD$ 的体积是 $4\times4\times2-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times4\times2\times4=\frac{32}{3}$.



21. 40π 【解析】米斗的示意图如图所示，设米斗两底面中心分别为 O_1，O_2，由棱台的性质可知，外接球的球心 O 在直线 O_1O_2 上.

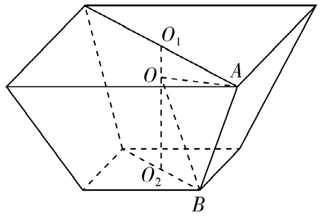
由题意 $O_1A=2\sqrt{2}$，$O_2B=\sqrt{2}$，$AB=2\sqrt{5}$，

所以 $O_1O_2=\sqrt{AB^2-(O_1A-O_2B)^2}=\sqrt{20-2}=3\sqrt{2}$.

设外接球的半径为 R，$OO_2=h$，则 $OO_1=|3\sqrt{2}-h|$.

因为 O_1O_2 垂直于上、下底面，所以 $OO_2^2+O_2B^2=R^2$，即 $h^2+(\sqrt{2})^2=R^2$，又

$OO_1^2+O_1A^2=R^2$，即 $(3\sqrt{2}-h)^2+(2\sqrt{2})^2=R^2$，联立解得 $h=2\sqrt{2}$，$R^2=8+2=10$，所以该米斗的外接球的表面积为 $4\pi R^2=40\pi$.



22. 84 【解析】由祖暅原理，该不规则几何体的体积与正六棱台的体积相等，正六棱台的上、下底面边长分别为 2 和 4，设上底面面积为 S_1，下底面面积为 S_2，高 $h=2\sqrt{3}$，

则 $S_1=6\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$，$S_2=6\times\frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}$，

故所求体积 $V=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h=\frac{1}{3}\times(6\sqrt{3}+24\sqrt{3}+\sqrt{6\sqrt{3}\times24\sqrt{3}})\times2\sqrt{3}=84$.

23. $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$ 【解析】圆锥 AO 的母线长 $l=\sqrt{r^2+r^2}=\sqrt{2}r$，故侧面积为 $\pi rl=\sqrt{2}\pi r^2$，

圆锥 AO 的表面积为 $\sqrt{2}\pi r^2+\pi r^2$，

半径为 r 的球的表面积为 $4\pi r^2$，

故圆锥 AO 与半径为 r 的球的表面积之比为 $\frac{\sqrt{2}\pi r^2+\pi r^2}{4\pi r^2}=\frac{\sqrt{2}+1}{4}$.